`Preparaduría II`

1.- Compruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes. Formular y demostrar las afirmaciones análogas para más de dos subespacios.

a) $W_1 + W_2$ es una suma directa, que denotaremos $W_1 \oplus W_2$, esto es: todo $\alpha \in W_1 + W_2$ se expresa de manera única como $\alpha = w_1 + w_2$, donde $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

c) $\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

2.- Muestre por medio de un contraejemplo que $W_1 + W_2 + W_3$ no es necesariamente una suma directa, incluso si $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$.

3.- Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V. Sea W un subespacio de V de dimensión k. Muestre que para todo conjunto $\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{im}\}$, con $m > n - k$ existe un vector no nulo $w \in W$ que es combinación lineal de $\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{im}\}$.

4.- Compruebe que si W_1 es un subespacio de V y si existe un único subespacio W_2 tal que $V = W_1 \oplus W_2$, entonces $W_1 = V$.

5.- Compruebe que $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$, donde

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} | c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

6.- Sea A una matriz compleja $m \times n$ y sea $\mathrm{Im} A$ el espacio vectorial generado por los vectores en las columnas de A. Muestre que, dada una matriz $m \times s$ B, existe C tal que $A = BC$ si, y sólo si, $\mathrm{Im} A \subseteq \mathrm{Im} B$.

7.- Sea $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x) \ldots (p_n - x)$ y sea

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_1 & a & a & a & \ldots & a & a \\ b & p_2 & a & a & \ldots & a & a \\ b & b & p_3 & a & \ldots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \ldots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \ldots & b & p_n \end{vmatrix}$$

a) Pruebe que, si $a \neq b$,

$$\Delta_n = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

b) Si $a = b$,

$$\Delta_n = a \sum_{i=1}^{n-1} f_i(a) + p_n f_n(a)$$

, donde $f_i(a)$ es $f(a)$ pero sin el factor $(p_i - a)$.

c) Utilizar b) para evaluar

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}_{n \times n}$$

8.- *El determinante de la matriz de Vandermonde.* Compruebe que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

En particular, si V es la matriz $n \times n$ tal que $V_{ij} = j^{i-1}$ entonces $|V| = (n-1)(n-2)^2 \dots 2^{n-2}$.

9.- Demuestre que, si $a \neq b$, entonces

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n \times n} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Dar la fórmula cuando $a = b$.

10.- Sea $a = (-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-2})$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ a & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Demuestre que $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$.

11.- Si cada $a_{ij}(t)$ es una funcion diferenciable de t, entonces

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1j}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2j}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nj}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Evaluar $\frac{d}{dt}|I + tA|$ cuando $t = 0$.

12.- Demuestre que si A es una matriz $n \times n$ con entradas 1 y -1, entonces $|A|$ es divisible por 2^{n-1}.

13.- Hallar las matrices que corresponden a las ‘operaciones elementales de fila y columna’[Aquí es necesario indicar también si las matrices operan a derecha o a izquierda]. Observe que estas transformaciones son invertibles. Un método para hallar la inversa A^{-1} de una matriz invertible A es obtener una sucesión de operaciones elementales de fila que transformen A en la identidad. Se aplican estas operaciones en ese mismo orden a la identidad y la matriz resultante resulta A^{-1}. Estudiar el método y explicar por qué funciona. Hallar la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

14.- Sean $A, B, C, X, Y, Z \in M_n(\mathbb{C})$. Si A^{-1} y B^{-1} existen, hallar

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1}$$

y

$$\begin{pmatrix} I & X & Y \\ 0 & I & Z \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$$

15.- Observe que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales a continuación es un espacio vectorial. Hallar la dimensión y dar una base para este espacio de solución.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

16.- Hallar todas las soluciones x_1, x_2, x_3, x_4 para el sistema

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \end{aligned}$$

donde y es un parámetro.

17.- El siguiente sistema está determinado o no de acuerdo a los valores de a y b. Analizar los posibles casos.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + 2x_3 &= 1 \\ ax_1 + (2b-1)\,x_2 + 3x_3 &= 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)\,x_3 &= 2b-1 \end{aligned}$$

18.- Hallar una base para el espacio de solución del siguiente sistema de n+1 ecuaciones con 2n incógnitas.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0 \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1} &= 0 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n} &= 0 \end{aligned}$$

19.- Sean W_1 y W_2 los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ generados respectivamente por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,2,-1,-2)^t \\ \alpha_2 &= (3,1,1,1)^t \\ \alpha_3 &= (-1,0,1,-1)^t \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (2,5,-6,-5)^t \\ \beta_2 &= (-1,2,-7,3)^t \end{aligned}$$

Hallar la dimensión y bases para $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

20.- Considere los sistemas de ecuaciones lineales: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ y $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Sean W_1 y W_2 los espacios de solución, respectivamente. Muestre que $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$.

21.- Sea A^* la conjugada traspuesta de la matriz compleja A, esto es, $A^* = \left(\bar{A}\right)^t$. A se dice *hermítica* si $A^* = A$. Real simétrica si A es real y $A^t = A$. Anti- hermítica si $A^* = -A$. *Normal* si $A^*A = AA^*$. Hallar la dimensión y dar bases para los siguientes espacios vectoriales:

a) $M_n(\mathbb{C})$, matrices $n \times n$ complejas, sobre $\mathbb{C}$.

b) $M_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$.

c) $H_n(\mathbb{C})$, matrices $n \times n$ hermíticas, sobre $\mathbb{R}$.

d) $S_n(\mathbb{R})$, matrices $n \times n$ simétricas, sobre $\mathbb{R}$.

e) $\tilde{H}_n(\mathbb{C})$, matrices $n \times n$ anti - hermíticas, sobre $\mathbb{R}$.

f) El espacio que consiste de todos los polinomios en A a coeficientes reales, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Es $H_n(\mathbb{C})$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$? Es el espacio de matrices normales $n \times n$ un subespacio de $M_n(\mathbb{C})$? Demuestre que $M_n(\mathbb{C}) = H_n(\mathbb{C}) + \tilde{H}_n(\mathbb{C})$.